高校での物理において、ニュートンの運動方程式、

$$ma = F \tag{1}$$

を学習する。これは、いわゆる"普通の物体"については成立する。

しかしながら、(電子などのきわめて小さな物体については、特に顕著であるが、)我々がイメージする普通の物体とは異なった挙動をすることが知られている。これは、「２重性」ともいわれるが、電子が、**粒子であると同時に、波である**、ということである。(高校物理の範囲)

粒子については、ニュートンの運動方程式が適用でき、運動を決定できる。

一方、波動としてみた動きを記述する方程式は、シュレディンガー方程式と言われ、大学の初等において、必ず学習することになるだろう。ここで、このシュレディンガー方程式について、高校の範囲の中で学習してみることにする。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right)\psi = E\psi \tag{2}$$

この(2)式が、一次元に限定したシュレディンガー方程式である。今回は、一次元に限定した(2)式を用い、高校の数学の範囲で、解答を行ってみる。(誘導形式なので、誘導に乗れば大丈夫！)

ちなみに、(2)における$m, \hbar$は定数として、Vはポテンシャル、Eはエネルギーとして扱う。

別途添付の図を参照。

この場合の領域(1)における、シュレディンガー方程式を記せ。

(3)

これは、φの２階の微分を含む方程式である。このφ(波動関数)を求めることができれば、運動を知ることができる。(3)を満たすφは、

$$\varphi = A sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + B cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) \tag{4}$$

である。(大学の範囲) なお、A,B は定数である。次は、これを決定することが必要。

境界条件により、$\varphi(0) = 0, \varphi(a) = 0$を代入すると、

(5)

(6)

(6)(つまり、$\varphi(a) = 0$の境界条件のほう)から、以下の関係式が得られる。

(sinが 0 になる、ということは…？)

(7)

(7)式から、Eについて解くと、

(8)

(nが整数なので、E が離散化することに対応。化学にて、とびとびのエネルギーをとる、と学ぶはず！)

これらにより、(4)に代入すると、

$$\varphi = \tag{9}$$

B はまだわかっていないので、解く。

$$\int_0^a |\varphi|^2 dx = 1 \tag{10}$$

であるので、（規格化、という）積分を実行すると、B が求まることになる。

（ヒント：

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\right) x dx = 1$$

とすればよい）

$$B = \tag{11}$$

これらによって、

$$\varphi = \tag{12}$$

これはあくまで序章に過ぎないが、「量子力学」として多くは学習することになるであろう。量子論は、現代の電子デバイスなど、幅広い分野で用いられている、きわめて重要な学問である。電子が粒子であると同時に波動である、という状態は、よく理解できないが、面白さを感じないだろうか？